数理解析研究所講究録
274巻 1976年 180-195

モーメント・プロブレムの一定理

自治医大　　竹内　文彦

§0 この小論において次の領域の2,3の性質を論ずる。

$$P \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ A : n\text{次正方行列} \;\middle|\; \begin{array}{l} A = \left(a_{(i,j)-2}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \\ A : \text{positive-definite} \end{array} \right\}$$

この問題そのものと解析数論との間には、直接の関係はないのであるが、次のようなモチーフに関連してこの問題を考える。今

$$Q \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ A : n\text{次正方行列} \;\middle|\; \begin{array}{l} A = \left(a_{\{i,j\}}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \\ A : \text{positive-definite} \end{array} \right\}$$

とおく。Qを調べることに特別の興味をもっているのであるが、その動機は次の通り。

例えば

$$A = \left(\frac{1}{\{i,j\}^s} \right) \qquad s>0, \quad \varphi(k,s) = k^s \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

とおく、そのとき本文において証明するように、Aはpositive

− definite であり

$$\lambda > \sum_{k=1}^{n} \varphi(k, s) \longleftrightarrow A - \frac{1}{\lambda} J : \text{positive-definite}$$

$$\longleftrightarrow A - \frac{1}{\lambda} J \in Q \qquad \text{但し} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

従って Q あるいはその boundary の形態を知ることは解析数論と直接関連がある.

もう1つの例として例えば S を $\cancel{}\,n$ 以下の平方因子を含まぬ数を小さい順から並べたもの の集合 とする.

$$A = (a_{ij})_{i,j \in S} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) = 1 \\ 0 & (i,j) > 1 \end{cases}$$

とおく. そのとき本文において証明するように. A は非退化であり.

$$\lambda > \sum_{k \in S} \frac{S_k^2}{a_k} \longleftrightarrow ADA - \frac{1}{\lambda} K : \text{positive-definite}$$

$$\longleftrightarrow ADA - \frac{1}{\lambda} K \in Q \text{ の } S \text{ に対応する principal-matrix}$$

の集合,

$$\text{但し} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_k = \sum_{\alpha_1 \geq 1, \cdots, \alpha_l \geq 1} M\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1} \cdots p_l^{\alpha_l}}\right) \qquad k = p_1 \cdots p_l,$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_k & \bigcirc \\ \bigcirc & & \ddots \end{pmatrix}$$ a_kは任意の正数

さて、PとQは次のように兼、共通のフォーミュレーションをもっている。$V = \langle 1, t, t^2, \cdots, t^{2n-2} \rangle$ $t^{2n-1} = 0$ とする

そのとき Pは次の $V^* \supset P_1$ と identity できる。

$$P_1^* \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ \varphi \in V^* \;\middle|\; \begin{matrix} \varphi(\alpha^2) > 0 \\ {}^\forall\alpha \in V \quad \alpha \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

又同様に $W = \langle x_1, \cdots, x_k, \cdots \rangle$ $k \in I$

但し $I = \{1, \cdots \{i, j\} \cdots\}$ $1 \leq i, j \leq n$ とする。

又 $x_l \, x_m = \begin{cases} x_{\{l,m\}} & \{l,m\} \in I \\ 0 & \{l,m\} \notin I \end{cases}$ を満す乗法が

W内にdefされているものとする。そのときQは次の $W^* \supset Q_1$ と identifyできる。

$$Q_1 \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \left\{ \varphi \in W^* \;\middle|\; \begin{matrix} \varphi(\alpha^2) > 0 \\ {}^\forall\alpha \in W \quad \alpha \neq 0 \end{matrix} \right\}.$$

上記のような形式的なものにとどまらずPとQには種々の共通点が存在するのであるが、一般的にいってPは調べやすくQは調べにくい。ここに於てはQについては軽くふれるに止め Pの2,3の性質を論ずる。尚、数はすべて実数とする。

§1 $E(r) \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \left(r^{i+j-2} \right)$ $1 \leq i, j \leq n$

とおく．そのとき次の定理は周知である．

定理 $A = (a_{i+j-2})_{1 \le i,j \le n}$ とする

$$A \in \mathbb{Q}P \longrightarrow {}^{\exists}\alpha_k > 0 \quad {}^{\exists}r_k \quad \text{s.t.}$$

$$A = \sum \alpha_k E(r_k)$$

上記定理を使って $P\mathbb{Q}$ 内に乗法を def しよう．

(i) $E(r) * E(s) \underset{def}{=\!=} E(r+s)$

(ii) $A, B \in \mathbb{Q}P$ とする．そのとき上記定理より

${}^{\exists}\alpha_k, \beta_l > 0 \quad {}^{\exists}r_k, s_l \quad$ s.t.

$$A = \sum \alpha_k E(r_k) \qquad B = \sum \beta_l E(s_l)$$

$$A * B \underset{def}{=\!=} \sum \alpha_k \beta_l E(r_k) * E(s_l)$$

そのとき，$*$ は well-defined であることは容易に分る．

又(i)，(ii)を言い換えることにより，次の定理が出る．

定理 $A = (a_{i+j-2}) \quad B = (b_{i+j-2}) \quad 1 \le i,j \le n$

$A, B \in \mathbb{Q}P$ とする．そのとき

$C = (c_{i+j-2})_{1 \le i,j \le n} \in P$ である。

但し

$$\left(\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{a_k}{k!}t^k\right)\left(\sum_{l=0}^{2n-2}\frac{b_l}{l!}t^l\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{2n-2}\frac{c_m}{m!}t^m \qquad t^{2n-1}=0$$

今 $P \supset R \underset{\text{def}}{\equiv} \{A\in P \mid a_1=a_3=\cdots=a_{2n-3}=0\}$

を考える。容易に分る如く、Rは上記 $*$ に関して閉じている

例えば $P \ni A, B$ $\quad A\sim B \underset{\text{def}}{\equiv} {}^\exists C, D\in R$ s.t.

$C*A = D*B$ によりP内に $\sim$ を入れ、$P/\sim$ を考えたりすることに興味をもっているのであるが、今はRに関連した次の定理をあげるにとどめておく。

定理 $A=(a_{i+j-2})$ $\quad 1\le i,j<\infty$ とし、

Aの任意のn次section $\check{A}_n$ は (nに無関係に) Rに属するものとする。そのときAの直交多項式は原点対称、即ちαをzero-ptとしてもてば、−αもzero pt.としてもつ。

但し、一般に無限行列 $X=(x_{ij})$ $\quad 1\le i,j<\infty$ に対して

そのn次section $X_n \underset{\text{def}}{\equiv} (x_{ij})$ $\quad 1\le i,j\le n$ とする。

又 $A=(a_{i+j-2})$ $\quad 1\le i,j<\infty$ とし、

$A_n \in$ (nに関した) P $\quad \forall n$ とする、そのとき

A は次の $A_1 \subset U^*$ と identify できる.

$$U = \langle 1, t, \cdots t^i, \cdots \rangle$$

$$A_1 \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \{\varphi \in U^* \mid \varphi(\alpha^2) > 0 \quad \alpha \in U \quad \alpha \neq 0\}$$

そのとき $P_k(t)$: k次の直交多項式 $\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $P_k(t)$: k次の多項式で、最 t^k の係数正. かつ $\varphi(P_k(t)P_l(t)) = \delta_{kl}$.

定理の証明

$X = (x_{ij})_{1\le i,j<\infty}$ を $(1\ t \cdots t^{n-1}) X_n = (1 \cdots (a+bt)^{n-1})$ $\quad b \neq 0$

をみたす. 無限~~ユニポテント~~上3角行列とする.

又 $A = (a_{i+j-2})_{1\le i,j<\infty}$ を $A_n \in$ (nに関した) P

とする. そのとき $X_n' A_n X_n \in P$ であるが、Xが上3角行列であることを使って容易に次のことが分る 即ち

$$\exists B = (b_{i+j-2})_{1\le i,j<\infty} \quad \text{s.t.} \quad B_n = X_n' A_n X_n$$

さて、AとBの直交多項式 $P_k(t)$ と $Q_k(t)$ を調べてみよう.

次が成立する

* ~~$Q_k(t) = \pm P_k(a+bt)$~~

$$P_k(t) = \pm Q_k(a+bt)$$

*の証明

$$A = (a_{i+j-2}) = (\varphi(t^{i-1} t^{j-1})) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

$$B = (b_{i+j-2}) = (\psi(t^{i-1} t^{j-1})) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

とかける. 又 $\varphi((a+bt)^{i-1}(a+bt)^{j-1}) = \psi(t^{i-1} t^{j-1})$ である

ことも容易に分る. 従って $\psi(P_k(a+bt) P_l(a+bt)) = \psi(Q_k(t) Q_l(t))$

$= \delta_{kl}$ 従って直交多項式のユニーク性より $Q_k(a+bt)$

$= \pm P_k(t)$ Q.E.D

今特に $A = (a_{i+j-2}) \quad 1 \leq i, j < \infty$ ~~≠~~ $A_n \in$ (nに関して) R

とし, $X = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ とする. そのとき $A = B$ であ

ることが容易に分るが上記*より. $A = B$ の直交多項式

$P_k(t)$ は次の性質をもっている $P_k(t) = \pm P_k(-t) = (-1)^k P_k(t)$

さて. α を $P_k(t)$ の zero pt とすれば $P_k(\alpha) = 0 = (-1)^k P_k(-\alpha)$

$\therefore\ P_k(-\alpha) = 0$ よって定理は証明された.

さて　$A=(a_{i+j-2})$　$1\leqq i,j<\infty$　$A_n\in$（nに関した）P

とし，$P_k(t)$　$k=0,1,\cdots$　をその直交多項式とする．

$$tP_0(t) = a_0P_0(t) + b_0P_1(t)$$

$$tP_1(t) = c_1P_0(t) + a_1P_1(t) + b_1P_2(t)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \cdots (\mathrm{I})$$

$$tP_k(t) = + \cdots\cdots \qquad + c_kP_{k-1}(t) + a_kP_k(t) + b_kP_{k+1}(t)$$

$$\vdots$$

となるが，実は(I)はもっと簡単に

$$tP_0(t) = a_0P_0(t) + b_0P_1(t)$$

$$tP_1(t) = b_0P_0(t) + a_1P_1(t) + b_1P_2(t) \qquad (\mathrm{II})$$

$$\vdots$$

し

$$tP_k(t) = \cancel{b_{k-1}} \qquad b_{k-1}P_{k-1}(t) + a_kP_k(t) + b_kP_{k+1}(t)$$

$$\vdots$$

とかけることが分っている（証明も全く trivial であるが）

II の matrix J 即ち

$$J \underset{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & & \text{\huge 0} \\ & b_1 & a_2 & b_2 & \\ \text{\huge 0} & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

を A or $P_k(t)$に関するヤコビ行列という。容易に分るごとく、$P_k(t)$ の zero pt. は J_k の eigenvalue にほかならない。

J に関する次の定理は全く trivial である。

定理

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & & & & \\ b_0 & 0 & b_1 & & \text{\Large 0} & \\ & b_1 & 0 & b_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & & & \\ & & & b_{k-1} & 0 & b_k \end{pmatrix}$$

$\longleftrightarrow$ $P_i(t)$ $(i=1,\cdots,k)$ の zero pt. 原点対称

証明] $\longleftarrow$ は自明であるから $\longrightarrow$ のみをいう。

1般に ij 成分のみが1でその他の成分が0である行列を E_{ij} とおく。$D_l \underset{def}{\equiv} \langle E_{1\,l+1}\ E_{2\,l+2}\cdots\cdots\ E_{k-l\,k} \rangle$ $l=-(k-1),\cdots,k-1$

又 $D_l \underset{def}{=} 0$ $l \geq k$ or $-k \geq l$ とおけば、簡単に分る如く、$\alpha \in D_l$ $\beta \in D_m \longrightarrow \alpha\beta \in D_{l+m}$ である。

さて今 J_k の eigenvalu のうちプラスのものを大きさの順にならべたものを、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots$ とし、マイナスのものを小さい方からならべたものを、$\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots$ とする。命題を否定して i を $\alpha_1=-\beta_1$ $\cdots$, $\alpha_{i-1}=-\beta_{i-1}$, $\alpha_i \neq -\beta_i$ をみたす数とする。

1般性を失うことなく $\alpha_i > -\beta_i$ としてよい。そのとき n をてきとうに大きい奇数とすれば、$tr(J_k^n) > 0$ となる。然るに、$J_k \in D_{-1}+D_1$ であるから、n が奇数であれば、J_k^n における D_0 の国 factor は zero. $\therefore tr(J_k^n)=0$ Q.E.D

又次の定理もtrivialである．

定理

$A = (a_{i+j-2})_{1 \leq i,j < \infty}$ ．$A_n \in$ (n=1…かんして) P とする．

$a_1 = a_3 = \cdots = 0 \iff P_k(t)$ の zero pt 原点対称だ

証明] $\longrightarrow$ は先ほど証明したので $\longleftarrow$ のみをいう．

1, 3, 5, …… は $2i-1$ $i=1,2,3\cdots$ とかける訳であるが，

これに関する induction を使う．

一般に

$$P_k(t) = c \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_k \\ a_1 & a_2 & & a_{k+1} \\ & \vdots & & \\ a_{k-1} & a_k & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & t & & t^k \end{vmatrix} \qquad c > 0$$

であることが知られているが，$P_1(t)$ の zero pt. が原点対称であれば，$P_1(t) = c \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = c(a_0 t + a_1)$ において $a_1 = 0$ である．$a_1 = a_3 = \cdots = a_{2i-1} = 0$ までいえたとして $a_{2i+1} = 0$ をいう

$$P_{i+1}(t) = c \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_{i+1} \\ \vdots & & \\ a_i & \cdots & a_{2i+1} \\ 1 & & t^{i+1} \end{vmatrix}$$

であるが，$P_{i+1}(t)$ の zero pt. は原点対称であるから，t^i の係数は zero でなければならない．ところで，t^i の係数は，

ラプラス展開より $\pm C\,a_{2i+1}|A_i|$ であるが、$C\neq 0$ $|A_i|\neq 0$ である故、$a_{2i+1}=0$ が分る　　　Q.E.D.

§2 一般に $\mathbb{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\mathbb{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とおくとき

$\mathbb{x}\circ\mathbb{y} \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ \vdots \\ x_ny_n \end{pmatrix}$ とおく、又 $(\mathbb{x},\mathbb{y}) \underset{\text{def}}{=} x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ とする。

今 $X=(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ とし X の第 j 列を $\mathbb{x}_j$ とおく

即ち $\mathbb{x}_j=\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$。又特に X を non-singular とする。

そのとき $\exists C^k_{ij}$ $(1\leq i,j,k\leq n)$ s.t. $\mathbb{x}_i\circ\mathbb{x}_j=\sum_k C^k_{ij}\mathbb{x}_k$

である。$D=\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots\ d_n \end{pmatrix}$ とおき $\mathbb{D}\underset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ とおけば、

$$X'DX=\left((\mathbb{D},\mathbb{x}_i\circ\mathbb{x}_j)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$ であることは直接の

計算で確かめることができる。

さて上記principleを次の2つの行列に対して適用する。

I　$T=X\underset{\text{def}}{=}(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$　$x_{ij}=\begin{cases}1 & i\mid j \\ 0 & i\nmid j\end{cases}$

そのとき、容易に分る如く $\mathbb{x}_i\circ\mathbb{x}_j=\mathbb{x}_{(i,j)}$ である。

$$\therefore \quad X'DX = \left(\left(\mathbb{D}, \mathbb{X}_{(i,j)}\right)\right)_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_2 & \ddots & & \\ \vdots & & t_{(i,j)} & \\ t_n & & & \end{pmatrix}_{1\le i,j\le n}$$

但し $t_i = \sum^{d|i} d_i$. このことを云い換えることにより.
次の prop. を得ることが出来る.

prop.1 $A = (a_{(i,j)}) = X' \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & b_n \end{pmatrix} X \qquad b_i = \sum^{d|i} \mu(d) a_{\frac{i}{d}}$

定理 $A = \left(\dfrac{1}{\{i,j\}^s}\right)_{1\le i,j\le n} \quad s>0$ は positive-definite であり.

$$A^{-1}[e] = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k,s) \quad \text{である. 但し } e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

~~証明~~ 又 $A[\mathbb{X}] \underset{def}{=\!=} \mathbb{X}' A \mathbb{X}$.

証明 $Y = \begin{pmatrix} 1^s & & & \\ & 2^s & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & n^s \end{pmatrix} \quad s>0$ とおくとき

$$Y'AY = \left(\left(i,j\right)^s\right) \underset{prop1}{=\!=} X' \begin{pmatrix} \varphi(1,s) & & & \\ & \varphi(2,s) & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & \varphi(n,s) \end{pmatrix} X$$

である. $\therefore \quad A^{-1} = YX^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi(1,s)} & & & \\ & \frac{1}{\varphi(2,s)} & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & \frac{1}{\varphi(n,s)} \end{pmatrix} (X')^{-1} (Y')$

である. $\therefore \quad A^{-1}[e] = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi(1,s)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \frac{1}{\varphi(n,s)} \end{pmatrix} \mathbb{Z}'$ である.

但し $\mathbb{Z} = (\varphi(1,s) \cdots \varphi(n,s))$

ここ $A^{-1}[e] = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k, s)$ 又 A が positive-definite であることは上記分解より明らか。

定理　$\lambda > 0$ のとき

$$\lambda > \sum \varphi(k, s) \Leftrightarrow A - \frac{1}{\lambda} J \in Q$$

証明] $A - \frac{1}{\lambda} J$ の ij 成分が $\{i, j\}$ のみに dep していることは、明らかである。次の公式は線型代数の理論において周知である。

$$Y' \begin{pmatrix} \alpha & \mathfrak{x}' \\ \mathfrak{x} & B \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} \alpha - B^{-1}[\mathfrak{x}] & \mathfrak{o}' \\ \mathfrak{o} & B \end{pmatrix}$$

但し $$Y = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{o}' \\ -B^{-1}\mathfrak{x} & E \end{pmatrix}$$

又 $$Z' \begin{pmatrix} \alpha & \mathfrak{x}' \\ \mathfrak{x} & B \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} \alpha & \mathfrak{o}' \\ \mathfrak{o} & B - \alpha^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}' \end{pmatrix}$$

但し $$Z = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1}\mathfrak{x}' \\ \mathfrak{o} & E \end{pmatrix}$$

上の議論を $\begin{pmatrix} \lambda & e' \\ e & A \end{pmatrix}$ に対して適用すれば

$$\exists Y, Z \text{ s.t. } Y' \begin{pmatrix} \lambda & e' \\ e & A \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} \lambda - \sum \varphi(k, s) & \mathfrak{o}' \\ \mathfrak{o} & A \end{pmatrix}$$

$$Z'\begin{pmatrix}\lambda & e' \\ e & A\end{pmatrix}{}^{t}Z = \begin{pmatrix}\lambda & 0' \\ 0 & A-\frac{1}{\lambda}J\end{pmatrix} \quad J = ee'$$

よって、両方の行列が positive-definite であることは同値であることを使うことにより、証明することが出来る。Q.E.D

II　Sを1以上n以下の平方因子を含まぬ数の集合とし

$$X = (x_{ij})_{i,j\in S} \quad x_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j)=1 \\ 0 & (i,j)>1 \end{cases}$$

そのときIの議論を少し変形することにより、Xの non-singularity が分る。さて次の定理は証明なしに承認していただきたい。

定理

$$X^{-1} = \left(\mu(i)\mu(j)\mu(\{i,j\})\,S_{\{i,j\}}\right)_{i,j\in S}$$

但し　$k = p_1\cdots p_\ell$ とするとき　$S_k = \sum_{\alpha_1\geq 1\cdots\alpha_\ell\geq 1} M\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}\cdots p_\ell^{\alpha_\ell}}\right)$

但し　$M(m) \underset{def}{=} \sum_{i=1}^{[m]} \mu(i) \quad m\geq 1 \qquad M(m) \underset{def}{=} 0 \quad m<1$ 」

又　$x_i^0 x_j$ は$\{i,j\}$のみに dep することは容易に分る。
即ち、$\{i,j\} = \{i',j'\} \longrightarrow x_i^0 x_j = x_{i'}^0 x_{j'}$　・・・・(2)

定理

$$\lambda > \sum_{k\in S}\frac{S_k^2}{a_k} \longleftrightarrow ADA - \frac{1}{\lambda}K : \text{positive-definite}$$

但し　$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & O \\ 0 & \end{pmatrix}$ （以下 positive-definite を p.d. とかく）

又 $a_k > 0$ $\quad D = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_k & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \quad k \in S$ とする.

証明] $$ADA - \frac{1}{\lambda}K \ : \text{p.d.} \leftrightarrow D - \frac{1}{\lambda} A^{-1} K A^{-1} : \text{p.d.}$$

$$\leftrightarrow D - \frac{1}{\lambda}\left(s_i s_j\right) : \text{p.d.} \quad i,j \in S \leftrightarrow \lambda E - D^{-\frac{1}{2}}(s_i s_j) D^{-\frac{1}{2}}$$

$$: \text{p.d.} \leftrightarrow \lambda > \mathrm{Tr}\left(D^{-\frac{1}{2}}(s_i s_j) D^{-\frac{1}{2}}\right) \leftrightarrow \lambda > \sum_{k \in S} \frac{s_k^2}{a_k} \qquad \text{Q.E.D.}$$

§2において書いたことは、全く elementary な linear-algebra であるが、このことを素材にして、次の step へ進むことが出来る。例えば上記(2)に対しては、

$$x_i \cdot x_j = \sum_{k \in S} C_{ij}^k x_k \qquad i,j \in S$$

但し $C_{ij}^k = \sum_{\substack{k|d|\{i,j\} \\ kd \in S}} \mu(d)$ が成立する。このalgebraはもっと広はんな準順序集合 S に対して、natural な拡張をもち、種々の応用をもっている。

又 §1 でふれた如く、$A = \left(a_{i+j-2}\right)_{1 \le i,j \le n}$ Q のとき

$A \in P$ であるための ~~条件~~ criterion は完全に与えられている。然し同じような criterion を Q の場合に与えることは非常に難かしいのではないかと思うが、種々の十分条件はあたえることが出来る。ここでは、証明抜きに、十分初等的ではあるが、稍々面しゅう悪な

印象を与える例を1つあげるにとどめておく。(十分条件そのものではない)

$\sigma > 1$ を $\displaystyle\sum_{k=1}^{l} \frac{\mu(k)}{k^{\sigma}} > 0$ をみたす任意の数とする。$\forall l$。

$$A = \left(\left[\frac{n}{\{i, j\}} \right] \right) \qquad B = \left(\frac{1}{\{i, j\}^{\sigma}} \right) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

とおくとき、A, B は p.d. であり、

$$A^{-1}[e] = \sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{n}{i}\right)^2 \qquad B^{-1}[e] = \sum_{k=1}^{n} \psi(k, \sigma)$$ である。

又

$$A - vB$$ は p.d. である。但し v は $0 < v < \frac{1}{m}$ をみたす任意の数又 $\displaystyle m = \frac{1}{n^{\sigma}} \times \left(\min_{l} \sum_{k=1}^{l} \frac{\mu(k)}{k^{\sigma}} \right)$ とする

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \psi(k, \sigma) < v \sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{n}{i}\right)^2$$

ほかにも色々あるが、別の機会にふれることにする。